157. $y\dfrac{dy}{dx}=A(x)y+B(x)$ ニ就テ

福原 満洲雄 (北大)

1. $A(x)$, $B(x)$ ガ $x\longrightarrow+\infty$ ノ時

$$(1)\quad \begin{cases} A(x)\sim a_{-m}x^{m}+a_{-m+1}x^{m-1}+\cdots\cdots \\ B(x)\sim b_{-n}x^{n}+b_{-n+1}x^{n-1}+\cdots\cdots \end{cases}$$

ナル形ニ近似的ニ展開サレ、$2m+1<n$ 且ツ n ハ奇數（n ガ偶數ナラバ x ヲ x^2 デ置キ換ヘレバヨイ）ナラバ

$$(a)\qquad y\frac{dy}{dx}=A(x)y+B(x)$$

ヲ形式的ニ満足スルヤウニ

$$(2)\qquad y\sim x^{p}\left\{\alpha_0+\cdots\cdots+\frac{\alpha_j}{x^j}+\cdots\cdots\right\}$$

ヲキメルコトガ出來ル。但シ

$$p=\frac{n+1}{2},\qquad \alpha_0=\pm\sqrt{\frac{2b_{-n}}{n+1}}$$

デ $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$ ハ常數，$\alpha_{n+1},\cdots\cdots$ ハ $p\log x+C$（p ハ一般ニ 0 デナイキマッタ常數，C ハ任意常数）ノ整多項式デアル、ソノヤウナ $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\cdots\cdots$ ノキメ方ハ唯一通リデアル。コレハ單ニ形式的ノ計算ニ依テ得ラレル事柄ニ過ギナイ。

I. (2) ヲ近似展開トスル (a) ノ解ハ唯一ツ存在スル、逆ニ (a) ノ解ハイヅレモ (2) ナル近似展開ヲ許ス。

II. $x_0 \leqq x < +\infty$ デ分岐点ヲ持ツ（即チ $y=0$ トナル）(a) ノ解ガ $x=x_0$ デ取ル値ヲ y_0 トシタトキ $y_0/x_0^{\frac{n+1}{2}}$ ナル点ノ集合ハ両端ガ ∞ マデ伸ビテヰル一ツノ曲線 L トナリ、x_0 ガ $+\infty$ ニ近ヅクニ従ツテ L ハ $\pm\sqrt{\frac{2b-n}{n+1}}$ ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ニ限リナク近ヅク。

III. L ニ依テ平面ガ二ツノ領域ニ分レル、其ノ中デ $\sqrt{\frac{2b-n}{n+1}}$ ヲ含ム方ヲ D_1, $-\sqrt{\frac{2b-n}{n+1}}$ ヲ含ム方ヲ D_2 トスレバ, $y(x_0)/x_0^{\frac{n+1}{2}}$ ガ D_1 ニ属スルヤウナ (a) ノ解ノ近似展開ハ $\alpha_0=\sqrt{\frac{2b-n}{n+1}}$ トナリ, $y(x_0)/x_0^{\frac{n+1}{2}}$ ガ D_2 ニ属スルヤウナ (a) ノ解ノ近似展開ハ $\alpha_0=-\sqrt{\frac{2b-n}{n+1}}$ トナル。

IV. $y(x_0)/x_0^{\frac{n+1}{2}}$ ガ L ノ上ニアルヤウナ (a) ノ解ハ $x_0 \leqq x < +\infty$ デ分岐点 ξ ヲ持ツカラ ξ カラ先ハ y ノ取ル値ガ二ツアル、ソノ中一方ノ近似展開ハ $\alpha_0=\sqrt{\frac{2b-n}{n+1}}$ トナリ、他方ノ近似展開ハ $\alpha_0=-\sqrt{\frac{2b-n}{n+1}}$ トナル。

以上ハ數學物理学會ノ年會デ報告シタ所デ、其ノ際此等ノ結果ハ解ノ存在定理カラ導カレルコトモ注意シタ、更ニ進ンデ

V. 近似展開 (2) ガ含ム任意常数 C ノ取ル値ハ (a) ノ解 $y(x)$ ガ x_0 デ取ル値 y_0 ニ依テキマルカラ, C ハ x_0, y_0

ノ函數ト見做セル、其ノ時

$$|C|<K|x_0|^{\frac{n+1}{2}}|y_0|$$

ガ成立スル、但シ K ハ x_0, y_0 ニ關係シナイ常數デアル。

VI. 近似展開 (1) ガ

$$\mathfrak{A}<\arg x<\mathfrak{B},\quad x\to\infty$$

デ成立スルナラバ近似展開 (2) モ同ジ所デ成立スル。

等々、皆同樣ノ方法デ證明サレル。

2. 併シ問題ハ以上デ終ッタワケデハナイ、モモモット詳シクナルデアラウ。$A(x)$, $B(x)$ ガ x ヲ極トスルトキ級數 (2) ノ收斂性モ問題ニナルデアラウ。一般ニ正確ニ解ケナイノデアルカラ、近似的ニ解クノデアリ、コリ精密ナ結果ヲ要求スレバスル程問題ハ複雜多岐ニ亘リ、何處マデ行ッテモコレデ完全ト言ヘル筈ノモノデハナイガ、目標ヲ何處ヘ置クカヲハッキリキメレバ、ソレニ應ジテ其ノ目的ニハドレダケ調ベレバ十分デアルカガワカッテ來ル。目標ヲ定メナケレバ研究ノ方針ハ立タナイ、ソコデ差當ッテ現在ノ目標ヲ次ニ述ベル Malmquist ノ定理ノ擴張ニ置カウト思フ。

『$R(x,y)$ ガ $x=\infty$ デ正則ナ函數ヲ係數トスル y ノ有理函數デアル時

$$\text{(A)}\qquad \frac{dy}{dx}=R(x,y)$$

ガ $x=\infty$ デ一價超越解ヲ持テバ (A) ハ Riccati ノ方

程式デアル』

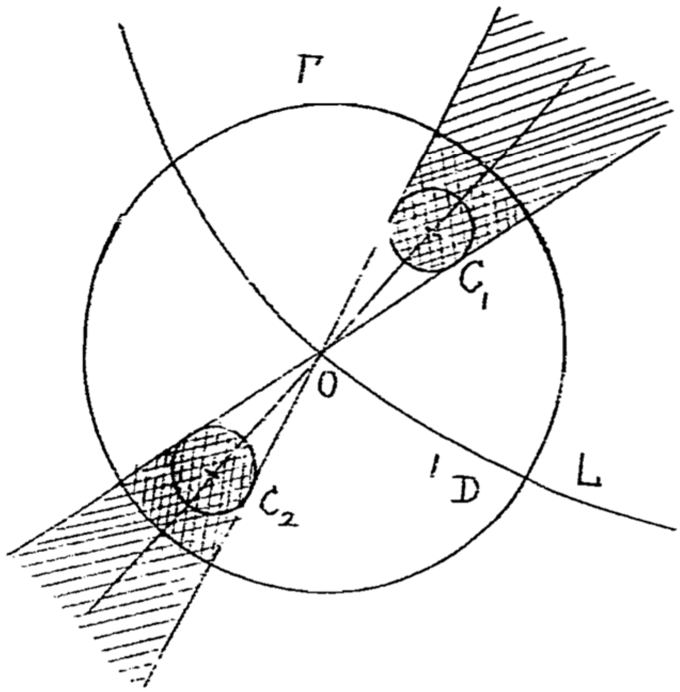
此ノ定理ニ於ケル一價トイフ假定ヲ除カウトイフノガ目的デアル、ソノ結果結論ニ変更ヲ要スルノハ當然デアラウ、ソコデ私ノ予想ヲ先ニ述ベテ置カウ。

『$R(x, y)$ ガ $x=\infty$ デ正則ナ函数ヲ係数トスル y ノ有理函数デ (A) ガ *Riccati* ノ方程式デナケレバ，$x=\infty$ ノ近傍デ（∞ ヲ除ク）分岐点ヲ持タナイ (A) ノ解ニ對シテ $x=\infty$ ハ正則点カ，代數的特異点カ，通常超越点（*point transcendant ordinaire*）デアル』

通常超越点トハドンナ路ニ沿ツテ近ヅイテモ函数ノ取ル値ガ一定値ニ收斂スルヤウナ超越特異点ヲイフノデ，例ヘバ $\log x$ ノ $x=0, \infty$ ノ如キガソレデアル、サウデナイ超越特異点ヲ眞性超越点（*point transcendant essentiel*）トイフ。

前述ノ *Malmquist* ノ定理ヲ基礎トシテ彼ハ一階常微分方程式ニ関スル *Painlevé* ノ問題ニ見事ナ解決ヲ與ヘタガ、ソノ定理ノ中ニ一價トイフ假定ガアルタメニ完全ナ解決ニ達シテ居ルトハ思ハレナイ、若シ予想定理ガ正シイナラバ *Malmquist* ノ結果ヨリ先ヘ進ムコトガ出來ル。*Painlevé* ノ問題ニ関シテハ後日マタ触レル機會モアルデセウカラ、再ビ微分方程式 (a) ニ戻ルコトニシヨウ。

3. 微分方程式 (a) ノ場合ニ $2m+1<n$ ナラバ予想定理ハ正シイ。結論ヲ先ニ述ベレバ，「$x=\infty$ ノ近傍デ分岐点ヲ持タナイ解ハ $x=\infty$ ヲ極トシテ持ツ」 此ノ場合注意スルマデモナク，(1) ハ近似展開デナク $A(x)$，$B(x)$ ノ Laurent 級数デアル、以下証明ノ順序ヲザツト述ベル。



(i) $\pm\sqrt{\dfrac{2b-n}{n+1}}$ ヲ中心トシ半径 δ ノ円 C_1，C_2 ヲ描キ，C_1，C_2 ト共通ナ点ヲ持タナイ線分デ原点 O ト結ベル点ノ集合（図ニ於テ斜線ヲ施シテナイ部分）ヲ D トスル。

$y_0/x_0^{\frac{n+1}{2}}$ ヲ D ノ中ニ取リ、$x(y_0)=x_0$ ヲ満足スル

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{A(x)y+B(x)}$$

ノ解ヲ y_0，0 ヲ結ブ線分ニ沿ッテ追跡スル、円 C_1，C_2 ノ半径 δ ハ幾ラ小サクテモヨイが、ソレニ對シテ $|x_0|$ ヲ十分ニ大キク取レバ，線分 $\overline{Oy_0}$ ノ上デ $|x(y)|>R$（R ハ十分ニ大キク與ヘラレタ数）ヲ満足スル、トイフコトハ x_0 が十分ニ大キイトキ $y(x_0)/x_0^{\frac{n+1}{2}}$ が D ニ属スルナラバ

其ノ解ハ $|x|>R$ デ分岐点ヲ持ツトイフコトニナル。

(ii) O ヲ中心トシ, $\sqrt{\left|\frac{2b_{-n}}{n+1}\right|}$ ヨリ大キナ半径 M ノ円Γヲ描キ其ノ外部ニ $y_0/x_0^{\frac{n+1}{2}}$ ヲ取リ, $y(x_0)=y_0$ ヲ満足スル (a) ノ解ヲ, $x=0$ ヲ中心トシ x_0 ヲ過ル円周ニ沿ッテ追跡スル(言ヒ換ヘルナラバ $x_0=r_0e^{i\theta_0}$, $x=re^{i\theta}$ ト表ハシタトキ $r=r_0$ ト置キ θ ダケヲ変数ト考ヘルノデアル) サウスレバ $|\theta-\theta_0|<\mu$ デ

$$|y(x)-y_0|<\sigma|y_0|$$

ナル形ノ不等式が得ラレル。σ ハ μ, M ニ関係スルが M ヲ大キク取ルコトニ依リ σ ハ幾ラデモ小サクスルコトが出来ル。故ニ $y(x_0)/x_0^{\frac{n+1}{2}}$ がヲ施シタ部分ニアッテモ, 其ノ解ヲ $|x|=r_0$ ナル円周ニ沿ッテ解析接続スレバ $y(x)/x^{\frac{n+1}{2}}$ が D ノ中ニ現ハレルヤウニナル、従ッテ其ノ解ハ $|x|>R$ デ分岐点ヲ持ツ。

(iii) 故ニ $|x|>R$ デ分岐点ヲ持タナイ解ニ對シテ $y(x)/x^{\frac{n+1}{2}}$ ハ圖ニ於テヲ施シタ部分ニナケレバナラナイ. 其ノ解ノ近似展開 (2) が含ム任意常数 C ノ取ル値ハ $\arg x$ ニ依テ変ルカモ知レナイが V ニ依テ C ノ取ル値ハ有界デアル. $\arg x=\theta_0+2n\pi$ ノ時ノ C ノ値ヲ C_n トスレバ VI ニ依テ $C_n=C_0+2np\pi i$ トナル. $\{C_n\}$ ハ有界デナケレバナラナイカラ $p=0$, 即チ近似級数 (2) ハ $\log x$ ヲ含マナイ、サウスレバ VI ニ依テ C ノ値ハ方向ニ依テ変ラナイカラ

$y(x)$ ハ $x=\infty$ デ一價トナリ, $x=\infty$ ガ $y(x)$ ノ極デアルコトガ分ル。

尚最後ニ此等ノ結果ヲ証明スルノニモ常ニ解ノ存在定理ガ基礎ニナッテヰルコトヲ附加ヘテ置ク。